

Министерство просвещения Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Уральский государственный педагогический университет»  
Институт математики, физики, информатики и технологий  
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

**ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ  
УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ ПРИ  
РАБОТЕ С ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ МАТЕРИАЛОМ**

Выпускная квалификационная работа

Направление подготовки «44.03.01 – Педагогическое образование.

Профиль «Математика»

Работа допущена к защите:

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

дата

\_\_\_\_\_

подпись

\_\_\_\_\_

оценка

Исполнитель:

Шакирова А.А.,  
студентка группы МАТ-  
1601z

\_\_\_\_\_

подпись

Научный руководитель:

Семенова И.Н., к.пед.н.,  
доцент кафедры высшей  
математики и методики  
обучения математике

\_\_\_\_\_

подпись

Екатеринбург 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УУД ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11-х КЛАССОВ ПРИ РАБОТЕ С ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ МАТЕРИАЛОМ .....	7
1.1. Определение познавательных универсальных учебных действий и их структура для обучающихся 10-11-х классов .....	7
1.2. Исследование возможности формирования познавательных универсальных учебных действий при работе с историко-математическим материалом .....	16
Выводы по материалам главы 1 .....	20
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УУД ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ .....	21
2.1. Стилистические конструкции для формулирования заданий, направленных на формирование ПУУД обучающихся 10-11-х классов при работе с историко-математическим материалом .....	21
2.2. Совокупность заданий для формирования ПУУД у обучающихся 10- 11-х классов при работе с историко-математическим материалом геометрической линии .....	36
Выводы по материалам главы 2 .....	41
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	42
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	44

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследования.** Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) предъявляет требования не только к предметным и личностным результатам, но и к метапредметным результатам. К метапредметным результатам относится формирование универсальных учебных действий (УУД) обучающихся.

Под универсальными учебными действиями в ФГОС в широком смысле понимается умение учиться, способность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта; а в более узком – совокупность способов действия учащегося (а также связанных с ними навыков учебной работы), обуславливающих его способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса.

Выделяя в работе познавательные универсальные учебные действия (ПУУД), отметим, что вопросы их формирования рассматриваются в исследованиях А.Г. Асмолова, Г.В. Бурменской, И.А. Володарской, Э.Г. Гельфман, О.А. Карабановой, Л.Г. Петерсон и др. В работах этих авторов показано, что ПУУД обеспечивают организацию учебно-познавательной деятельности и направлены на формирование у обучающихся научной картины мира, развитие способности управлять своей познавательной и интеллектуальной деятельностью, формирование умений искать и перерабатывать информацию.

Кроме того, согласно образовательной программе среднего общего образования с учетом общих требований Стандарта и специфики изучаемых предметов в предметной области «Математика и информатика» у обучающихся должно быть сформировано представление о социальных, культурных и *исторических* факторах становления математики.

Анализ литературы по использованию исторического материала в процессе обучения математики в рамках сформулированных позиций показал,

что исследователи рассматривают разные аспекты включения историко-математического материала, расширяя его дидактический потенциал. Так, вопросами целесообразности использования историзма в процессе обучения математике занимались: В.В. Бобынин, Л. Вейль, М. Клайн, Р. Курант, Н.И. Лобачевский, Д.Д. Мордухай-Болтовский, Д. Пойа, А. Пуанкаре и др. Проблемы историзации школьного математического образования интересуют современных исследователей естественнонаучного образования: М.И. Глухова, Ю.А. Дробышев, И.В. Дробышева, О.Н. Журавлева, Т.А. Иванова, Д. Икрамов, А.Е. Малых, Т.С. Полякова, И.М. Смирнова, И.Н. Семенова, Т.Т. Фискович, О.В. Шабанова и др.

Несмотря на то, что выводы указанных выше авторов могут быть использованы при организации современного процесса обучения математике в школе для достижения современных образовательных результатов, отметим, что вопросы, связанные с возможностями использования историко-математического материала для формирования, в частности, познавательных универсальных учебных действий полностью не раскрыты.

Сказанное определяет **актуальность** заявленной темы выпускной квалификационной работы.

**Объект исследования:** процесс обучения математике в 10-11-х классах.

**Предмет исследования:** историко-математический материал как средство формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся 10-11-х классов.

**Цель исследования:** для содержательной линии геометрии составить систему заданий, направленных на формирование ПУУД обучающихся 10-11-х классов при работе с историко-математическим материалом.

Для достижения цели определены следующие **задачи**:

1. Определить понятие познавательных универсальных учебных действий и выделить их структуру для обучающихся 10-11-х классов.

2. Выделить средства историзации школьного математического образования и исследовать возможности их использования для формирования познавательных УУД.

3. Сформулировать конструктор для формулирования заданий, направленных на формирование ПУУД при работе с историко-математическим материалом.

4. При конкретизации конструктора составить совокупность заданий, направленных на формирование ПУУД при работе обучающихся 10-11-х классов с историко-математическим материалом для содержательной геометрической линии.

### **Апробация работы.**

По материалам исследования подготовлены статьи практико-ориентированного содержания:

1. Епанчинцев М.Ю., Семенова И.Н., Шакирова А.А. К вопросу о формировании регулятивных универсальных учебных действий при использовании индивидуальных домашних заданий в системе среднего профессионального образования // Современная педагогика: теория, методология, практика: сб. статей Междунар. научно-практ. конф. (24 сентября 2019 г.) – Петрозаводск: МЦНП «Новая наука», 2019. С. 47-55

2. Епанчинцев М.Ю., Семенова И.Н., Шакирова А.А. Конструирование заданий для формирования познавательных УУД у обучающихся 10-11-х классов при изучении историко-математического материала (на примере геометрической содержательной линии) // Педагогические чтения. - 2021. - №3.

Материалы исследования были представлены студентам 1 курса института МФИиТ: МИ-2031, МИ-2032 в рамках курса «. Результаты обсуждения и наблюдения за выполнением заданий по представленным материалам показали, что у 72% студентов были затруднения. Сказанное подчеркивает актуальность выбранной темы выпускной квалификационной работы.

### **Структура работы.**

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, содержащего 37 наименований. В работе 3 таблицы, 2 рисунка и 1 схема.

# **ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УУД ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11-х КЛАССОВ ПРИ РАБОТЕ С ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ МАТЕРИАЛОМ**

## **1.1. Определение познавательных универсальных учебных действий и их структура для обучающихся 10-11-х классов**

Основной задачей современного школьного образования является формирование у обучающихся «универсальных учебных действий». Под универсальными учебными действиями, согласно [2], в широком смысле, понимается умение учиться, то есть способность человека к самосовершенствованию, в узком смысле – совокупность способов действий, обеспечивающих самостоятельное усвоение новых знаний, формирование умений, включая организацию этого процесса.

Как отмечают исследователи (например, [3, 10]), всесторонняя развитость личности в системе образования происходит за счет формирования универсальных учебных действий, которые являются основополагающим компонентом процесса обучения.

В составе компонентов универсальных учебных действий (далее – УУД) выделяют четыре блока: личностный, регулятивный, познавательный, коммуникативный [2]. При этом в познавательном блоке (иначе-когнитивном) выделяют специальный подблок – логические универсальные учебные действия.

В рамках выпускной квалификационной работы будем рассматривать блок познавательных универсальных учебных действий, поэтому стремление к корректности описания структуры ПУУД определяет необходимость рассмотрения различных подходов к понятию «познавательные универсальные учебные действия». В связи с этим рассмотрим разные определения отечественных авторов и на основе контент-анализа сформулируем, принимаемое в работе определение ПУУД.

Л.И. Боженкова [9] под познавательными УУД понимает такие действия, которые обеспечивают познание – умственный творческий процесс получения и постоянного обновления знаний, необходимых человеку, которое обозначает способность к умственному восприятию и переработки информации.

Н.А. Чуланова [43] под познавательными УУД понимает систему способов познания, обеспечивающую интеллектуальное развитие обучающегося, с целью применения полученных знания на практике, а также с целью владения навыками познавательной рефлексии, осознания совершаемых действий, оценивания своих результатов, установления границ своего знания и незнания, становления перед собой новых познавательных задач и способов их достижения для решения проблем в реальных жизненных ситуациях.

О.В. Степанова [39] рассматривает познавательные УУД как особую избирательную направленность личности на процесс познания; ее избирательный характер выражен в той или иной предметной области знаний. Эта направленность характеризуется постоянным стремлением к более полным и глубоким знаниям. Автор подчеркивает, что познавательные универсальные учебные действия носят поисковый характер.

И.Д. Лушников и Е.Ю. Ногтева [33] утверждают, что познавательные УУД – это действия, обеспечивающие научно-ориентированное познание мира и развитие познавательных функций личности. Это действия, результатами которых становится сформированность научной картины мира, овладение методологией познания, стратегиями и способами познания и учения; развитие символического, логического, творческого мышления, продуктивного воображения, произвольных памяти и внимания, рефлексии.

И.Г. Липатникова [32] под познавательными УУД понимает систему способов познания окружающего мира, построения самостоятельного



процесса поиска, исследования и совокупность операций по обработке, систематизации, обобщению и использованию полученной информации.

А.Г. Асмолов [2] представляет познавательные УУД, как исследовательские действия, с помощью которых осуществляется поиск информации, исследование.

Анализ вышеизложенного теоретического материала, создает условия для выделения существенных признаков (контентов) определения понятия «познавательные УУД», что позволяет на их основе провести контент анализ понятия ПУУД (табл. 1).

Таблица 1

Контент-анализ определения понятия «познавательные УУД»

Контенты	Авторы					
	Л.И. Боженкова	Н.А. Чуланова	О.В. Степанова	И.Д. Лушников и Е.Ю. Ногтева	И.Г. Липатникова	А.Г. Асмолов
Система способов познания	+	+	+	+	+	
Процесс получения и обновления знаний, используемых на практике	+	+	+			
Навыки познавательной рефлексии		+		+		
Избирательная направленность личности		+	+			
Сформированность научной картины мира				+		
Исследовательские действия	+		+		+	+
Развитие символического, логического и творческого мышлений				+		

Проведенный контент анализ позволил определить понятие ПУУД следующим образом:

познавательные универсальные учебные действия – это способы познания, которые включают в себя использование навыков познавательной рефлексии, исследовательских действий, в том числе поиск и обработку информации, с целью получения и обновления знаний, применяемых на практике, а также развития символического, логического и творческого мышлений.

Продолжая описывать блок познавательных УУД, укажем, что в рамках выпускной квалификационной работы будем придерживаться структуры познавательных универсальных учебных действий, выделенной А.Г. Асмоловым и др. [3], так как их структура не противоречит определению ПУУД, которое приведено нами выше.

Рассматривая наполнение блока ПУУД, отметим необходимость выделения их структуры для достижения поставленной цели у обучающихся 10-11-х классов. Для этого обратимся к ФГОС СОО. Соотнесем метапредметные результаты, которыми должны овладеть учащиеся уровня среднего общего образования и структуру ПУУД[2] и компоненты структуры познавательных УУД (согласно, А.Г. Асмолову). Представим результаты в схеме (рис. 1). При этом уточним, что рассматривая метапредметные умения, нас будут интересовать только те, которые связаны с познавательной деятельностью и методами познания. Поэтому умения, связанные с коммуникативными, личностными и регулятивными братья во внимание не будут. К таким отнесем следующие: рефлексия собственных действий, оценивание себя и действий товарищей, умения общаться и взаимодействовать, разрешать спорные ситуации и конфликты и др.



**Рисунок 1. Схема соотношений метапредметных умений, компонентов структуры ПУУД и предметных результатов**

Исходя из представленных результатов, перечислим компоненты структуры познавательных универсальных учебных действий для обучающихся 10-11-х классов:

1. Самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели.
2. Умение осознанно строить речевое высказывание в устной и письменной формах.
3. Выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий.
4. Постановка и формулирование проблемы.
5. Самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера.
6. Анализ.
7. Синтез.
8. Выбор оснований и критериев для сравнения объектов.
9. Классификация объектов.
10. Установление причинно-следственных связей.
11. Выдвижение гипотез и их обоснование.
12. Самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера.
13. Моделирование и преобразование модели.

На основании системно-деятельностного подхода, который является методологической основой достижения современных результатов ФГОС, раскроем структуру познавательных универсальных учебных действий для обучающихся 10-11-х классов.

Для этого проведем анализ педагогической и методической литературы [13, 21, 23] и выделим пооперационный состав каждого умения. Результат представим в таблице (табл. 2).

Таблица 2

Пооперационный состав компонентов структуры ПУУД 10-11х классов

<b>Компоненты структуры ПУУД</b>	<b>Пооперационный состав компонентов</b>
1. Самостоятельное	- понимать различие между целями и задачами,

выделение и формулирование познавательной цели	<ul style="list-style-type: none"> <li>- выделить результат,</li> <li>- выделить известное и неизвестное,</li> <li>- сопоставить известное и неизвестное,</li> </ul>
2. Умение осознанно строить речевое высказывание в устной и письменной формах	<ul style="list-style-type: none"> <li>- вникать в суть услышанного или прочитанного</li> </ul>
3. Выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий	<ul style="list-style-type: none"> <li>- умение определять наиболее простой способ решения задачи из представленных в определенных условиях;</li> <li>- умение определять условия, при которых представленный способ решения задачи будет наиболее простым;</li> <li>- умение решить задачу несколькими способами</li> </ul>
4. Постановка и формулирование проблемы	<ul style="list-style-type: none"> <li>- умение прогнозировать условия, при которых невозможно решение задачи;</li> <li>- умение определять изменения в условиях;</li> <li>- умение определять недостаточную для решения задачи информацию</li> </ul>
5. Самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера	<ul style="list-style-type: none"> <li>- умение определять, какие задачи необходимо выполнить для достижения цели;</li> <li>- умение отбирать для решения задач необходимые источники информации;</li> <li>- умение сопоставлять и отбирать информацию, полученную из различных источников</li> </ul>
6. Анализ	<ul style="list-style-type: none"> <li>- разделять объекты на части,</li> <li>- располагать части в определенной последовательности,</li> <li>- характеризовать части этого объекта.</li> </ul>
7. Синтез	<ul style="list-style-type: none"> <li>- умение выделять основание объединения;</li> <li>- умение объединять элементы по заданному основанию;</li> <li>- умение преобразовать целое по другому основанию</li> </ul>
8. Выбор оснований и критериев для сравнения объектов	<ul style="list-style-type: none"> <li>- умение определять основание классификации объектов;</li> <li>- умение распределять элементы по заданному критерию;</li> <li>- умение выделять признаки, по которым сравниваются объекты;</li> <li>- умение выделять признаки сходства/различия;</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- умение выделять главное и второстепенное в изучаемом объекте;</li> <li>- умение выделить признаки объекта по определенному критерию</li> </ul>
9. Классификация объектов	<ul style="list-style-type: none"> <li>- выделять основание классификации,</li> <li>- выделять главные и второстепенные объекты классификации,</li> <li>- устанавливать связь между объектами,</li> <li>- располагать в определенной последовательности.</li> </ul>
10. Установление причинно-следственных связей	<ul style="list-style-type: none"> <li>- умение определять истинность логических суждений по заданным исходным условиям;</li> <li>- умение определять исходные условия по заданным логическим суждениям;</li> <li>- умение определять условия по заданным исходным данным и конечному результату;</li> <li>- умение находить главное в изучаемом явлении или объекте;</li> <li>- умение устанавливать главную причину явления;</li> <li>- умение кратко оформлять высказывание, связывающее причину и следствие</li> </ul>
11. Выдвижение гипотез и их обоснование	<ul style="list-style-type: none"> <li>- умение формулировать вывод/предположение на основе нескольких положений;</li> <li>- умение определить закон, которому подчиняется данное явление;</li> <li>- умение разделять гипотезу/предположение на структурные составляющие;</li> <li>- умение выбирать из нескольких предположений/выводов/гипотез наиболее верные корректные, в наибольшей степени отражающие заданные посылки;</li> <li>- умение обосновывать гипотезу, используя известные теоретические факты или наблюдения и эксперименты</li> </ul>
12. Самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера	<ul style="list-style-type: none"> <li>- умение поставить цель;</li> <li>- умение отличать цель и задачи;</li> <li>- умение разделять объекты на части;</li> <li>- умение выделять главное и второстепенное;</li> <li>- умение сопоставлять цель и результат</li> </ul>
13. Моделирование и	-

преобразование модели	<p>умение выделять существенные характеристики (пространственно-графические или знаково-символические);</p> <p>- умение преобразовать объект из чувственной формы в модель, в которой будут отражены его существенные признаки;</p> <p>- преобразование модели с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область</p>
-----------------------	--

Подводя итог сказанному, констатируем, что анализ литературы, сопоставление и обобщение представленных результатов позволяют в качестве определения термина познавательных универсальных учебных действий использовать следующее:

Познавательные универсальные учебные действия – это способы познания, которые включают в себя использование навыков познавательной рефлексии, исследовательских действий, включая поиск и обработку информации, с целью получения и обновления знаний, используемых на практике и развития символического, логического и творческого мышлений. В качестве структурных элементов ПУУД для обучающихся 10-11-х классов можно выделить: 1) самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели; 2) умение осознанно строить речевое высказывание в устной и письменной формах; 3) выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; 4) постановка и формулирование проблемы; 5) самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера; 6) анализ; 7) синтез; 8) выбор оснований и критериев для сравнения объектов; 9) классификация объектов; 10) установление причинно-следственных связей; 11) выдвижение гипотез и их обоснование; 12) самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера; 13) моделирование и преобразование модели.

## **1.2. Исследование возможности формирования познавательных универсальных учебных действий при работе с историко-математическим материалом**

В пункте 1.1. была выделена структура познавательных универсальных учебных действий для обучающихся 10-11-х классов, которые должны быть сформированы, в частности в процессе обучения математике. Исследуем дидактический потенциал историко-математического материала для формирования элементов указанной структуры. Для проведения такого исследования рассмотрим средства историзации.

В этой связи, используя работы [14, 35], сформулируем определение понятия «историко-математический материал», под которым будем понимать материал, отражающий аддитивность исторического и математического содержаний какого либо единичного факта (цитата, демонстрация портрета, информация о биографии и тд.), который представляет взаимосвязь между историческими деятелями и фактами.

Отметим исследования Т.С. Поляковой и Ю.В. Романова [35], которые выделяют различные средства историзации на уроках математики.

В обучении математике используются не отдельные элементы историко-математического материала, а их система, которая органично включена в образовательный процесс, поэтому рассмотрим различные средства историзации согласно [35].

1. Исторический экскурс. Под историческим экскурсом понимается освещение сведений из истории математики, которые связаны с изучаемой темой в рамках образовательной программы. Исторический экскурс представляет собой некую систему, которая кратко характеризует основные утверждения, понятия и факты.

2. Исторический очерк. Под историческим очерком будем понимать совокупность исторических экскурсов, которые связаны между собой общей идеей. Авторы отмечают, что исторические очерки в школьных учебниках используются в качестве введения или заключения к математическому курсу.



3. Историческая беседа. Данное средство историзации представляет собой высказывание суждений в диалоге или обмен мнениями об историко-математических фактах.

Е.С. Полякова и Ю.В. Романов отмечают [35]: «Исторический факт или дополнение к задаче должны иллюстрировать одно или несколько следующих обстоятельств: значение задачи для развития математики; значение задачи для развития других наук; значение задачи для практики; происхождение задачи; эволюция методов решения задачи; другие реальные связи математики и истории (элементы биографии, библиографии, этнографии, хронологии и т.д.)».

Выделим типы задач, встречающиеся наиболее часто в школьных учебниках:

4. Исторические задачи. Данные задачи представляют собой математические задачи, привлекающие внимание многих математиков на протяжении долгого периода времени. Отметим, что к историческим задачам относятся именные задачи.

5. Старинные задачи. Под старинными понимают задачи из исторических математических источников, начиная с древнеегипетских математических папирусов и заканчивая сборниками отечественных старинных задач.

6. Хронологические таблицы. Таблицы называются хронологическими, если они представляют систему историко-математических фактов, построенных последовательно и характеризующих основные этапы развития в историческом времени какого-либо математического события, понятия, теоремы, жизнь и творчество персоналий.

Для исследования возможности формирования познавательных универсальных учебных действий при работе с историко-математическим материалом проведем соотнесение (рис. 2) выделенных компонентов структуры ПУУД обучающихся 10-11-х классов, представленных в пункте 1.1 и описанных средств историзации.



Рисунок 2. Соотнесение средств историзации и компонентов структуры ПУУД

Представленное соотнесение позволяет сформулировать вывод о том, что историко-математический материал может эффективно использоваться для формирования познавательных универсальных учебных действий.

## **Выводы по материалам главы 1**

1. Формирование познавательных универсальных учебных действий является одной из основных задач школьного математического образования.

2. В качестве определения ПУУД может быть выбрано следующее: познавательные универсальные учебные действия – это способы познания, которые включают в себя использование навыков познавательной рефлексии, исследовательских действий, в том числе поиск и обработку информации, с целью получения и обновления знаний, применяемых на практике, а также развития символического, логического и творческого мышлений.

3. Структура познавательных универсальных учебных действий для обучающихся 10-11-х классов может быть представлена следующим образом: 1. Самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели. 2. Умение осознанно строить речевое высказывание в устной и письменной формах. 3. Выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий. 4. Постановка и формулирование проблемы. 5. Самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера. 6. Анализ. 7. Синтез. 8. Выбор оснований и критериев для сравнения объектов. 9. Классификация объектов. 10. Установление причинно-следственных связей. 11. Выдвижение гипотез и их обоснование. 12. Самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера. 13. Моделирование и преобразование модели.

4. Историко-математический материал быть использован для формирования познавательных универсальных учебных действий при установлении определенного соответствия между средствами историзации и компонентами структуры познавательных универсальных учебных действий для учащихся 10-11-х классов.

## **ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УУД У ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

### **2.1. Стилистические конструкции для формулирования заданий, направленных на формирование ПУУД обучающихся 10-11-х классов в рамках содержательной линии геометрии**

В рамках главы 1 была теоретически обоснована и доказана возможность использования историко-математического материала для формирования познавательных универсальных учебных действий.

Учитывая мнение Д. Б. Богоявленской [8], отметим, что современный образовательный процесс должен быть обращен не только к предметным знаниям учащихся, но и к их аналитическим способностям, умению работать с информацией, что в результате, как мы считаем, будет способствовать стимулированию познавательной деятельности, и, в конечном счете, становлению позиции субъекта деятельности.

В рамках этого укажем, что процесс формирования ПУУД протекает в том случае, если учащиеся выполняют специально сформулированные задания для работы с историко-математическим материалом, поэтому необходимо сконструировать специальный алгоритм составления таких заданий. В этой связи выделим стилистические конструкции (слова, словосочетания), которые нужно использовать при составлении заданий для целенаправленного формирования познавательных учебных действий у обучающихся 10-11-х классов (табл. 3).

Будем учитывать, что конструирование заданий проводится на языке деятельностного подхода, разработанного, в частности, О.Б. Епишевой [18]. При выделении конструкторов используем работы [30] и др. Для достижения поставленной цели в процессе решения сформулированной во введении задач выделим стилистические конструкции и раскроем их с позиции геометрической линии.

Таблица 3

**Стилистические конструкции, направленные на формирование ПУУД у обучающихся 10-11 классов**

<b>Компоненты структуры ПУУД</b>	<b>Пооперационный состав компонентов</b>	<b>Слова (словосочетания) для конструирования</b>
1. Самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели	- понимать различие между целями и задачами	найдите, выделите, разделите, сопоставьте, сформулируйте, разделите
	- выделить результат	
	- выделить известное и неизвестное	
	- сопоставить известное и неизвестное	
2. Умение осознанно строить речевое высказывание в устной и письменной формах	- вникать в суть услышанного или прочитанного	прочитайте, выделите, разделите, объясните
3. Выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий	- умение определять наиболее простой способ решения задачи из представленных в определенных условиях	соотнесите, сопоставьте, выделите, приведите пример, объясните
	- умение определять условия, при которых представленный способ решения задачи будет наиболее простым	
	- умение решить задачу несколькими способами	
4. Постановка и формулирование проблемы	- умение прогнозировать условия, при которых невозможно решение задачи	приведите пример (контрпример), сформулируйте,
	- умение определять изменения в условиях	

	- умение определять недостаточную для решения задачи информацию	объясните, опишите, выделите
5. Самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера	- умение определять, какие задачи необходимо выполнить для достижения цели	выделите, разделите на части, укажите, перечислите, сопоставьте, выделите главное, сравните, сопоставьте, найдите сходства (различия), выделите главную мысль
	- умение отбирать для решения задач необходимые источники информации	
	- умение сопоставлять и отбирать информацию, полученную из различных источников	
6. Анализ	- разделять объекты на части	Вычлените существенную и несущественную информацию, установите связи, выделите, охарактеризуйте, опишите
	- располагать части в определенной последовательности	
	- характеризовать части этого объекта	
7. Синтез	- умение выделять основание объединения	найдите сходства, выделите, опишите, обобщите, выберите, сформулируйте вывод
	- умение объединять элементы по заданному основанию	
	- умение преобразовать целое по другому основанию	
8. Выбор оснований и критериев для сравнения	- умение определять основание классификации объектов	установите связи, объясните смысл, выделите, охарактеризуйте,
	- умение распределять элементы по заданному критерию	
	- умение выделять признаки, по которым сравниваются объекты	

объектов	- умение выделять признаки сходства/различия	опишите, постройте цепочку рассуждений, оцените, выделите из информации, назовите
	- умение выделять главное и второстепенное в изучаемом объекте	
	- умение выделить признаки объекта по определенному критерию	
9. Классификация объектов	- выделять основание классификации	
	- выделять главные и второстепенные объекты классификации	
	- устанавливать связь между объектами	
	- располагать в определенной последовательности	
10. Установление причинно- следственных связей	- умение определять истинность логических суждений по заданным исходным условиям	сопоставьте, выскажите свое мнение, выясните причины, объясните почему, предположите
	- умение определять исходные условия по заданным логическим суждениям	определите, выделите,
	- умение определять условия по заданным исходным данным и конечному результату	уточните, сопоставьте,
	- умение находить главное в изучаемом явлении или объекте	соедините, приведите
	- умение устанавливать главную причину явления	примеры,
	- умение кратко оформлять высказывание, связывающее причину и следствие	
11. Выдвижение гипотез и их обоснование	- умение формулировать вывод/предположение на основе нескольких положений	объедините, разделите, объясните,
	- умение определить закон, которому подчиняется данное явление	предложите,



	- умение разделять гипотезу/предположение на структурные составляющие	сопоставьте, выделите, поставьте в определенной последовательности,
	- умение выбирать из нескольких предположений/выводов/гипотез наиболее верные корректные, в наибольшей степени отражающие заданные посылки	
	- умение обосновывать гипотезу, используя известные теоретические факты или наблюдения и эксперименты	
12. Самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера	- умение поставить цель	расположите, разделите, соотнесите, выделите,
	- умение отличать цель и задачи	
	- умение разделять объекты на части	
	- умение выделять главное и второстепенное	
	- умение сопоставлять цель и результат	
13. Моделирование и преобразование модели	- умение выделять существенные характеристики (пространственно-графические или знаково-символические)	сделайте схему, изобразите график, постройте взаимосвязь, опишите, объедините, внесите, составьте, измените
	- умение преобразовать объект из чувственной формы в модель, в которой будут отражены его существенные признаки	
	- преобразование модели с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область	

Продолжая строить конструктор (алгоритм) формулирования специальных заданий, укажем их этапизацию. Для этого обратимся к методико-математической литературе.

В. Г. Фридман указывает на то, что перед составлением задания необходимо выделить основание для его конструирования [41]. Он считает, что

таких оснований может быть три, включая то, каким должно быть задание, тематик у его содержания и вариативность подходов к его выполнению.

По мнению С. С. Бакулевской при составлении заданий необходимо действовать строго по заранее запланированной схеме, которая должна быть основана на мыслительных операциях обобщения и аналогии.[4].

Учитывая специфику работы с историко-математическим материалом, по аналогии с исследованиями М. А. Куприяновой[28] определим основные этапы составления заданий, направленных на формирование познавательных УУД при работе с историко-математическим материалом:

1) Выбор предметного содержания. На данном этапе преподавателю необходимо определить какой математический материал он будет использовать в образовательном процессе и выделить средство его историзации.

2) Выбор элементов структуры ПУУД, которые будут формироваться у обучающихся. На данном этапе необходимо определить взаимосвязь между используемыми средствами историзации математического материала и формируемыми ПУУД (см. Рис. 2)

3) Построение формулировки задания. На данном этапе учителю необходимо сформулировать учебное задание (см. Табл. 3) для работы с историко-математическим материалом, который был выбран на 1 этапе.

В рамках предмета и цели исследования специально отметим, что в учебниках по геометрии для 10-11-х классов Л. С. Атанасяна и др., а также А. В. Погорелова и др., которые рекомендованы для использования в учебном процессе школы МОиН РФ, мы не обнаружили исторических сведений вообще. Следовательно, учителю необходимо при планировании занятий с использованием исторического материала обращаться к дополнительной литературе.

Подводя итог описанным результатам, представим схематически поэтапное составление заданий, направленных на формирование

познавательных УУД при работе с историко-математическим материалом, при использовании стилистических конструкторов (схема 1).

Создание заданий осуществляется на основе интеграции содержательно-методических линий школьного курса математики с компонентами структуры познавательных универсальных учебных действий и соответствующих стилистических конструкций (табл. 3).

Использование выделенных средств историзации учебного материала, позволяет школьникам овладеть необходимыми, согласно ФГОС, компонентами УУД, которые являются инструментом для овладения способностью самосовершенствования и самоорганизации.

На основе анализа содержания компонентов структуры ПУУД определены специальные стилистические конструкции, способствующие формулированию заданий. Также необходимо отметить, что при разработке заданий необходимо выстраивать взаимообратную связь между средствами историзации учебного материала и компонентами структуры ПУУД для учащихся 10-11-х классов.

Приведенная схема может быть использована для составления заданий, направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий при работе с историко-математическим и краеведческим материалом

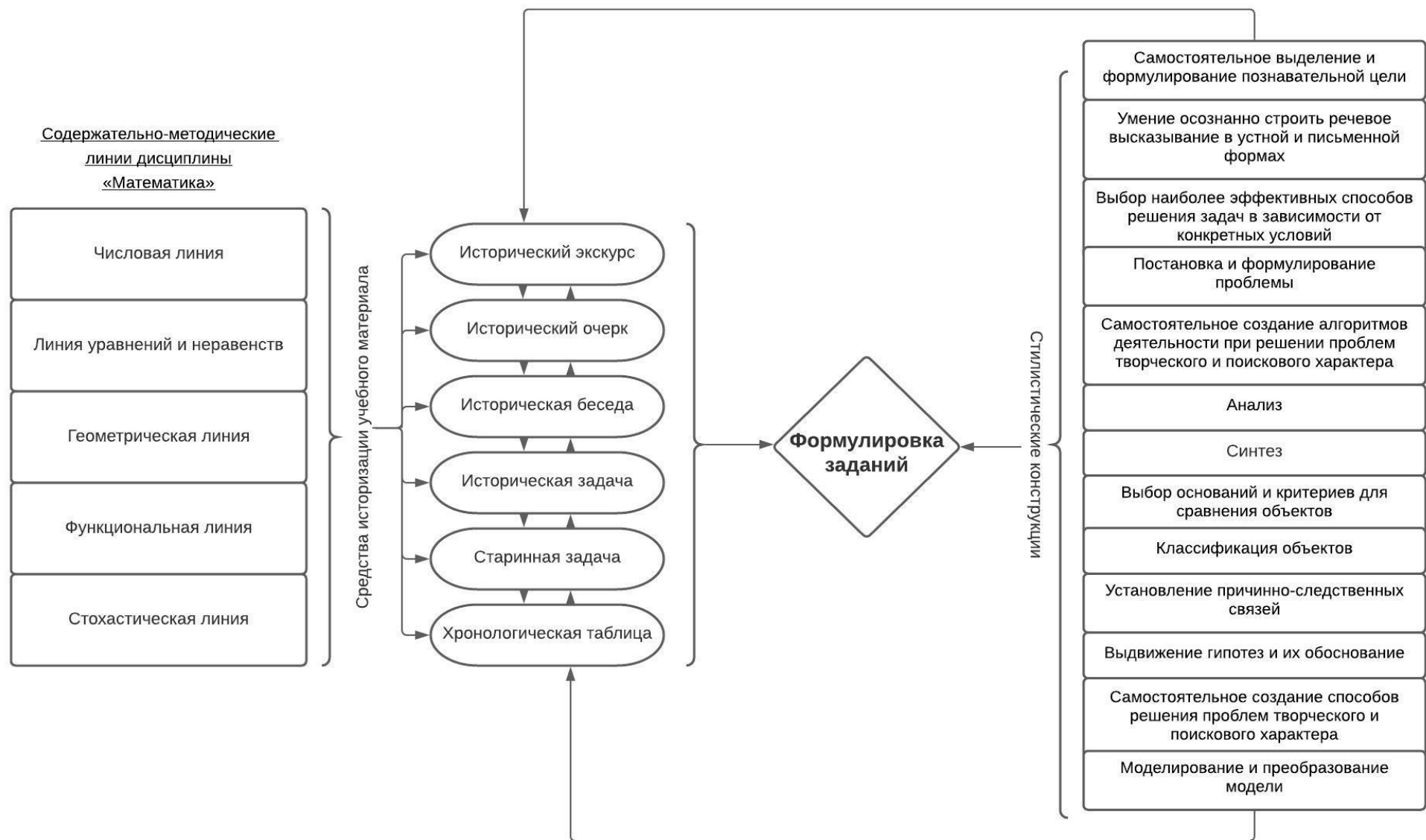


Схема 1. Методология выделения формулировки заданий, направленных на формирование ПУУД при работе с историко-математическим материалом

Продолжая решение поставленной задачи, в рамках предмета исследования, выделим геометрическую линию.

Выделение названной линии обуславливается следующими факторами:

1. Выделением линии как основной на протяжении истории отечественного математического образования (работы Л. Ф. Магницкого, Н. И. Лобачевского и др.).

2. Возможность организации работы обучающихся 10-11-х классов с информацией, представленной в научно-популярной и (при специальном подборе) научной литературе.

3. Эмоционально-ценностной составляющей историко-математического геометрического материала для формирования культуры, мировоззрения и личностных качеств.

4. Реализацией возможности закрепления (при расширении и углублении) предметного материала.

Укажем место выделенного содержательного блока в линии (Рис. 2)



Рисунок 2. Геометрическая линия школьного курса математики

Рассматривая, согласно представленному рисунку материал для обучающихся 10-11-х классов в соответствии с УМК Л.С. Атанасяна и др, укажем тематику историко-математического материала, который может быть использован в образовательном процессе. Результат представим в таблице (табл. 4).

Таблица 4

Соответствие тематического планирования по геометрии и  
подходящего для использования в образовательном процессе историко-  
математического материала

<i>Название раздела</i>	<i>Название темы</i>	<i>Подходящий для использования историко-математический материал</i>
<b>10 класс</b>		
Введение в стереометрию	Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- аксиома параллельности Евклида, или пятый постулат - одна из аксиом, лежащих в основании классической планиметрии. Впервые приведена в «Началах» Евклида [6];</li> <li>- в современных источниках обычно приводится другая формулировка постулата о параллельных, эквивалентная (равносильная) V постулату и принадлежащая Проклу (за рубежом её часто называют аксиомой Плейфера): «В плоскости через точку, не лежащей на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной» [6]</li> </ul>
	Некоторые следствия из аксиом	
	Решение задач	
Параллельность прямых и плоскостей	Параллельность прямых. Прямой и плоскости.	
	Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми.	

	Параллельность плоскостей	
	Тетраэдр и параллелепипед	
	Урок обобщения и систематизации знаний	
Перпендикулярность прямых и плоскостей	Перпендикулярность прямой и плоскости	<p>- стереометрическому материалу посвящены последние три книги «Начал» Евклида. XI книга содержит теорию перпендикулярности прямой и плоскости. Этот материал в большей своей части входит в настоящее время в учебники по стереометрии [6];</p> <p>- Евклид дает следующее определение: «Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна ко всем прямым, проведенным в плоскости в точке, в которой она эту плоскость встречает». Этому определению должно было предшествовать доказательство того, что такая прямая существует, чего у Евклида нет. Кроме того, приведенное определение не дает критерия, чтобы установить перпендикулярна ли данная прямая к данной плоскости или нет. С некоторым опозданием Евклид устраняет эти недостатки, доказывая по сути теорему – признак перпендикулярности прямой и плоскости. Доказательство, данное Евклидом длинное и сложное. Приведенное доказательство в учебниках по геометрии – доказательство О. Коши (XIX век) [6];</p> <p>- теорема о трех перпендикулярах, в «Началах» не содержится. Она была</p>
	Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью	
	Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей	
	Урок обобщения и систематизации знаний	

		<p>доказана математиками востока: доказательство имеется в «Трактате о полном четырехстороннике» Иасир ад-Дина ат-Туси и в тригонометрическом трактате его анонимного предшественника. В Европе эта теорема была впервые сформулирована Луи Бертраном (1731 – 1812) и доказана в «Элементах геометрии» Лежандра (1794) [6]</p>
Многогранники	Понятие многогранника. Призма.	<p>- пифагорейцы открыли построение правильных многогранников [20];</p> <p>- Гиппократ занимался удвоением куба [11]. Эту задачу пытались осуществить с помощью циркуля и линейки. Гиппократ обобщил её и свёл к вопросу об отыскании двух средних пропорциональных между заданными величинами [20];</p> <p>- Архит нашёл решение задачи об увеличении куба в заданном отношении [11]</p>
	Пирамида	
	Правильные многогранники	
	Урок обобщения и систематизации знаний	
Некоторые сведения из планиметрии	Углы и отрезки, связанные с окружностью	<p>- по сообщению Прокла Фалес открыл, что при пересечении двух прямых получаются равные углы; доказал теорему о равенстве двух треугольников, имеющих равными сторону и два угла [20]. Также, ему приписывают предложение о том, что вписанный в полукруг угол, построенный на диаметре, будет прямым [11];</p> <p>- согласно Евдему, пифагорейцы открыли предложение о том, что в каждом треугольнике сумма углов равняется двум прямым [11];</p> <p>- Прокл сообщает, что Энопид был первым, занимавшимся</p>
	Решение треугольников	
	Теоремы Менелая и Чевы	
	Эллипс, гипербола и парабола	



		задачей построения для опускания перпендикуляра [11]
<b>11 класс</b>		
Векторы в пространстве	Понятие вектора в пространстве	<p>- в «Началах» изложены основы древнегреческого геометрического исчисления, сложение величин сводилось к сложению отрезков, умножение величин — построению прямоугольников на соответствующих отрезках [1];</p> <p>- наиболее значительный вклад в развитие векторного исчисления внес У. Гамильтон в связи с изложением теории комплексных чисел и учения о кватернионах (1853). Именно Гамильтон стал применять понятия «вектор», «скаляр», «скалярное произведение», «векторное произведение» [1]</p>
	Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число	
	Компланарные векторы	
Метод координат в пространстве. Движения	Координаты точки. Координаты вектора	<p>Существенным толчком в создании координатной геометрии была работа И. Ньютона «Перечисление кривых третьего порядка» (1706). [1]</p>
	Скалярное произведение векторов	
	Движения	
	Урок обобщения и систематизации знаний	
Цилиндр, конус, шар	Цилиндр	<p>- Гиппас дал построение шара, описанного вокруг додекаэдра [11];</p> <p>- Менехм открыл конические сечения [20];</p> <p>- Евклид написал трактат о конических сечениях [11]</p>
	Конус	
	Шар	
	Урок обобщения и систематизации знаний	
Объемы тел	Объем прямоугольного параллелепипеда	<p>- Архимед говорит, что Демокрит открыл, что объем конуса или пирамиды составляет треть объем цилиндра или призмы с тем же основанием и той же высотой</p>
	Объем прямой призмы и цилиндра	
	Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса	

	Объем шара и площадь сферы	[11]; - Архимед установил, что объемы цилиндра и вписанного в него шара соотносятся как 3:2 [11]. Установил (без доказательства), что если вписать в куб два цилиндра с взаимно перпендикулярными осями, то объем, общий тому и другому, составит $\frac{2}{3}$ объема куба [11]. Дал определение поверхности и объема шара[11]
--	----------------------------	--

Анализ содержания обучения геометрии и историко-математического материала позволяет уточнить схему 1 в контексте достижения образовательных результатов, выраженных в формировании познавательных универсальных учебных действий для содержательно-методической линии геометрии (схема 2).

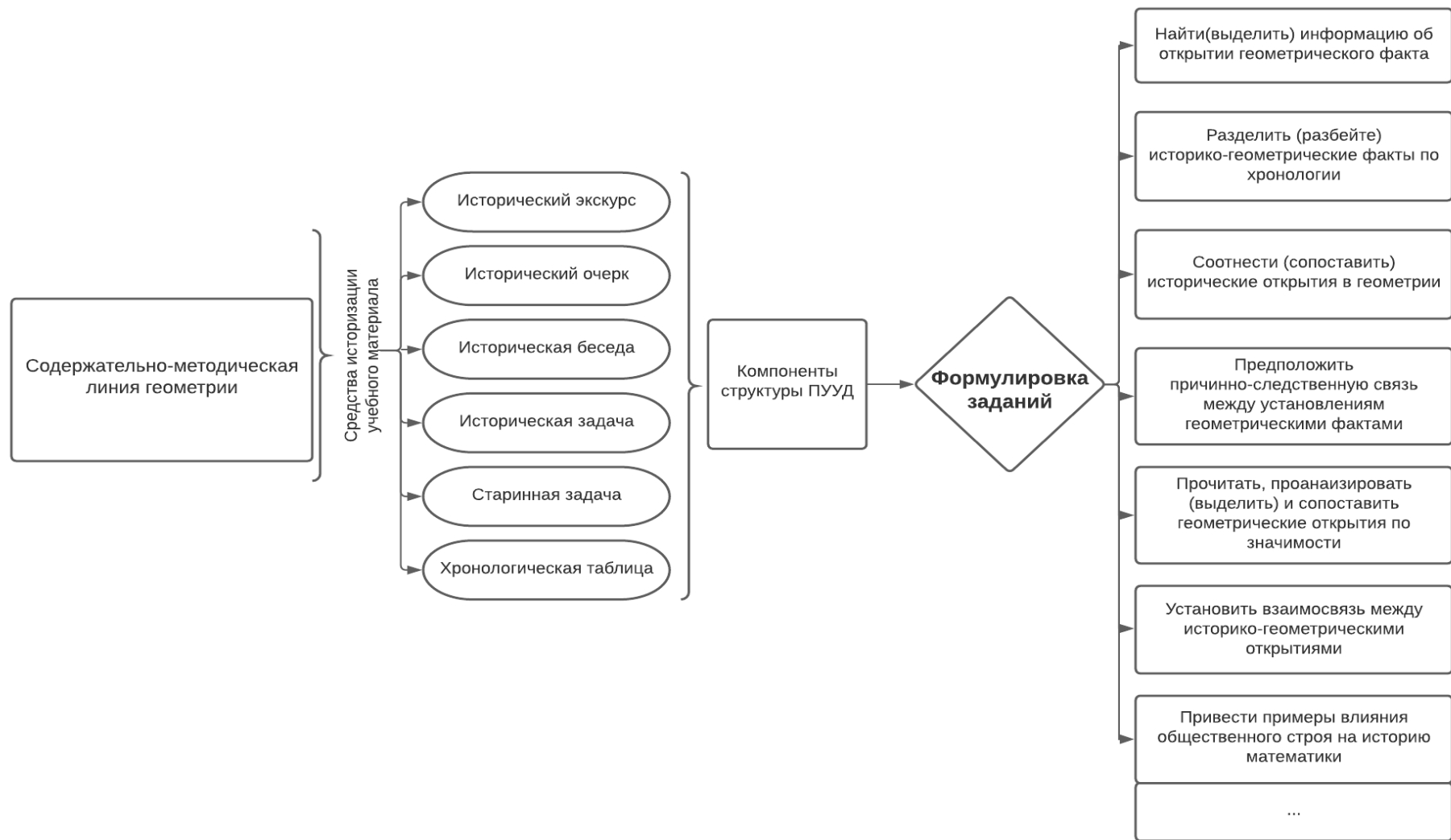


Схема 2. Методология формулирования заданий на формирование ПУУД в рамках содержательной линии геометрии

Представленная схема, при определенном уточнении, задает методологию конструирования заданий для формирования ПУУД при организации работы обучающихся с геометрическим материалом на различных ступенях обучения.

## **2.2. Совокупность заданий для формирования ПУУД у обучающихся 10-11-х классов при работе с историко-математическим материалом геометрической линии**

В предыдущем пункте были описаны стилистические конструкции при составлении заданий и сформулированы этапы составления заданий, направленных на формирование познавательных УУД при работе с историко-математическим материалом. Основываясь на положениях п. 2.1., используя схему, приведем примеры заданий, направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий при работе с историко-математическим материалом геометрической линии школьного курса математики.

### **Пример 1.**

**Формируемые ПУУД:** моделирование и преобразование модели

*Задание 1.* В источнике [19] найти информацию о выведении формулы для вычисления объема усеченной пирамиды.

*Задание 2.* Выписать количество методов выведения объема усеченной пирамиды, которые указаны в тексте источника [19]

*Задание 3.* Составить таблицу, в которой необходимо указать метод выведения формулы и алгоритм доказательства (количество столбцов должно соответствовать количеству методов, указанных в тексте).

Методы доказательства формулы для вычисления объема усеченной пирамиды.

Название метода		...	
Алгоритм доказательства			

*Задание 4.* Если при выполнении задания 3, была найдена не вся информация, то обратитесь к источнику [11] и дополните таблицу.

### **Пример 2.**

**Формируемое ПУУД:** анализ информации.

*Задание 1.* Выбрать источник [19].

Задание 2. Найти информацию о Героне Александрийском и ответить на вопросы:

- Чем, кроме математики, занимался Герон?
- Кто, исходя из арабских источников, первым открыл формулу для вычисления площади треугольника по трем его сторонам?

### **Пример 3.**

**Формируемые ПУУД:** классификация объектов.

*Задание 1.* Прочитать материал источников [11,20] на стр. 9-15 и стр. 39-45 соответственно, и сравнить их на наличие следующей информации:

- указание тематики, о которой говорится в 13-ти книгах Евклида;
- примерные годы жизни Евклида;
- указание математиков, которые занимались построением системы аксиом геометрии.

*Задание 2.* Сформулировать высказывание о полноте изложения историко-математического материала в соответствии со следующими критериями:

- если в тексте имеются ответы на все три вопроса, то материал изложен достаточно полно;
- если в тексте имеются ответы на два вопроса, то данным материалом можно воспользоваться, но он не даст ответов на все вопросы;
- если в тексте имеется ответ только на один вопрос, то для выполнения данного задания материалов будет не достаточно.

### **Пример 4.**

**Формируемые ПУУД:** анализ информации.

*Задание 1.* Прочитать информационный текст ([11] на стр. 19-20).

*Задание 2.* Выразить главную мысль текста.

*Задание 3.* Выписать из текста термины практического происхождения и их определения.

### **Пример 5.**

**Формируемые компоненты ПУУД:** анализ информации.

*Задание 1.* Прочитать текст на стр. 243 источника [10], разбить его на смысловые части и дать заголовок каждой из них.

*Задание 2.* Ответить на вопрос «О чем идет речь в прочитанном тексте?».

*Задание 3.* Пересказать содержание текста, выделяя в нем главное.

### **Пример 6.**

**Формируемые компоненты ПУУД:** анализ информации, классификация объектов.

*Задание 1.* Из источника [10] выделите информацию об открытиях в области геометрии следующих математиков: Фалес Милетский, Пифагор Самосский, Гиппократ Хиосский.

*Задание 2.* Исходя из выделенной информации задания 1, заполните таблицу

Открытия и достижения математиков в области геометрии

<i>Математики</i>	<i>Годы жизни</i>	<i>Открытия (достижения)</i>	<i>Год открытия</i>
Фалес Милетский			
Пифагор Самосский			
Гиппократ			

*Задание 3.* Сформулируйте, по какому признаку были выбраны математики, указанные в задании 1.

### **Пример 7.**

**Формируемые компоненты ПУУД:** анализ информации, выдвижение гипотез и их обоснование.

*Задание 1.* Найдите в сети книгу «Пробуждающаяся наука», автором которой является Ван дер Варден Б.Л., и выделите из нее информацию, где указывается, что отношение объема цилиндра и вписанного в него шара (при определенных условиях) равно  $3/2$ .

*Задание 2.* Выпишите, кем и в какое время (в каком году) был установлен этот факт.

*Задание 3.* Выпишите методы, которые применялись при доказательстве данного факта.

*Задание 4.* Сформулируйте предположение о том, может ли таким способом быть доказан данный факт в современных учебниках по геометрии.

Ответ обоснуйте.

*Задание 5.* Используя qr-код, перейдите по ссылке и выпишите решение задачи об отношении объема цилиндра и вписанного в него шара (при определенных условиях), представленного в учебнике по геометрии.



*Задание 6.* Укажите отличия решения данной задачи от материала, представленного в учебнике геометрии (указывается конкретный учебник), а так же от материала источника, указанного в задании 1.

*Задание 7.* Если в решениях есть различия, то предположите почему (объясните какие).



## **Выводы по материалам главы 2**

1. Для конструирования заданий, направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий при работе с историко-математическим материалом могут быть использованы определенные слова (словосочетания), полученные при соотнесении с компонентами структуры ПУУД и пооперационным составом компонентов.

2. При соблюдении ряда дидактических и организационных условий, и выделенной в п.2.1. этапизации составления заданий при использовании средств историзации учебного материала возможно построение схемы формулирования заданий, направленных на формирование ПУУД учащихся 10-11-х классов при работе с историко-математическим материалом.

3. Уточнение схемы за счет предметного содержания позволяет сформулировать задания для формирования ПУУД при работе обучающихся с историко-математическим материалом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведена исследовательская работа по теме «Формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся 10-11 классов при работе с историко-математическим материалом».

В ходе этой работы были решены поставленные задачи исследования.

В ходе решения первой задачи понятие «познавательные универсальные учебные действия» было определено как способы познания, которые включают в себя использование навыков познавательной рефлексии, исследовательских действий, включая поиск и обработку информации, с целью получения и обновления знаний, используемых на практике и развития символического, логического и творческого мышлений. Также была зафиксирована структура познавательных универсальных учебных действий для обучающихся 10-11-х классов, представленная следующими компонентами: 1. Самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели. 2. Умение осознанно строить речевое высказывание в устной и письменной формах. 3. Выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий. 4. Постановка и формулирование проблемы. 5. Самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера. 6. Анализ. 7. Синтез. 8. Выбор оснований и критериев для сравнения объектов. 9. Классификация объектов. 10. Установление причинно-следственных связей. 11. Выдвижение гипотез и их обоснование. 12. Самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера. 13. Моделирование и преобразование модели.

В ходе решения второй задачи были выделены средства историзации, которые можно представить следующим списком: 1. Исторический экскурс. 2. Исторический очерк. 3. Историческая беседа. 4. Исторические задачи. 5. Старинные задачи. 6. Хронологические таблицы. Также было построено соответствие между средствами историзации и

компонентами структуры познавательных УУД, что позволило сделать вывод о возможности использования историко-математического материала в достижении образовательных результатов.

В ходе решения третьей задачи в качестве способа формулирования заданий были выделены стилистические конструкции, представленные в таблице 3. Также, были сформулированы этапы конструирования заданий, представленные следующей структурой: 1) выбор предметного содержания. 2) выбор элементов структуры ПУУД, которые будут формироваться у обучающихся. 3) построение формулировки задания.

В рамках решения четвертой задачи на практическом этапе настоящего исследования предложены примеры заданий для формирования познавательных универсальных учебных действий при работе с историко-математическим материалом.

В ходе исследования доказано, что историко-математическим материалом необходимо использовать как средство формирования универсальных учебных действий школьников на примере предметной области «математика».

Показано, что применение, сформулированных примеров обеспечивает формирование познавательных универсальных учебных действий школьников. В целом, на данном этапе исследование можно считать завершённым.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д. Что же такое вектор? /У Математика в школе. 1984. № 5.С. 39-46.
2. Асмолов, А. Г. Программа развития универсальных учебных действий: структура, содержание, ожидаемые результаты [Электронный ресурс] / А. Г. Асмолов. – URL : <http://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/raznoe/2012/12/01/dlya-molodogo-spetsialista> (дата обращения: 05.01.2020)
3. Асмолов, А. Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе : от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя [Текст] / А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская и др.; под ред. А. Г. Асмолова. 2-е изд. – М. : Просвещение, 2011. – 159 с.
4. Бакулевская С. Эвристическая задача как субъективное пространство саморазвития ребенка. -М., 2001. -7 с.
5. Безенкова Е.В. Использование исторического компонента на уроках математики // Санкт-Петербургский образовательный вестник. - 2017. - №5. - С. 32-35.
6. Бескин Л.Н. Стереометрия. – М.: Просвещение, 1971.
7. Блинова Т.Л., Семенова И.Н., Слепухин А.В. Актуальные проблемы образования: формирование представлений о роли математики в современном обществе: монография. Урал.гос. пед. ун-т. Екатеринбург : [б. и.], 2018. 94 с.
8. Богоявленская Д.Б. Рабочая концепция одаренности. -2-е изд., расш. и перераб. -М., 2003. -95 с
9. Боженкова Л.И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 205 с.
10. Болгарский,Б.В. Очерки по истории математики / Б.В.Болгарский. –Минск : Вышэйшая школа, 1976. –368 с. –Текст : непосредственный.

11. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. — 456 с.

12. Вятчанникова И.А., Семенова И.Н., Эрентраут Е.Н. Примеры заданий на формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся при работе с задачей //Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий [Электронный ресурс] : межвузовский сборник научных работ / Урал.гос. пед. ун-т ; науч. ред. Л. В. Сардак. – Электрон.дан. – Екатеринбург : [б. и.], 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). С.194-197.

13. Гельфман, Э. Г. Формирование универсальных учебных действий при изучении числовых систем в школьном курсе математики. Психодидактика математического образования [Текст] / Э. Г. Гельфман, В. Н. Ксенева // Перспективы развития, возможности и границы : материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Томск : Издательство ТГПУ, 2012. – С.68–75.

14. Глейзер Г. И. История математики в средней школе : пособие для учителей.М.: Просвещение, 1970.

15. Горленко Н.М., Запятая О.В., Лебединцев В.Б., Ушева Т.Ф. Структура универсальных учебных действий и условия их формирования // Народное образование. 2012. №4. С.153-160.

16. Даан-Дальмедико,А. Пути и лабиринты: очерки по истории математи-ки / А.Даан-Дальмедико, Ж.Пейффер. –М.: Мир, 1986. –433 с. – Текст : непосредственный.

17. Епанчинцев М.Ю., Семенова И.Н. Использование исторических экскурсов при обучении математике для формирования познавательных универсальных учебных действий. Сборник статей Всероссийского педагогического форума : (7 июня 2020 г.) – Петрозаводск : МЦНП «Новая наука», 2020. С. 62-68.

18. Епишева О.Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: Книга для учителя. М.: Просвещение, 2003. – 223 с.

19. Зверкина Г.А. «История математики»: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2005. – 108 с.

20. История математики с древнейших времен до начала нового времени / Башмаков И.Г., Березкин Э.И., Володарский А.И., Розенфельд Б.А., Юшкевич А.П., Юшкевич А.П. и др. – М.: Наука, 1970. – 352 с.

21. Как проектировать универсальные учебные действия в начальной школе: от действия к мысли: пособие для учителя [Текст] / под ред. А. Г. Асмолова. – М. : Просвещение, 2008. – 152 с.

22. Карабанова, О.А. Универсальное образование – путь к развитию общей одаренности детей и подростков [Текст] / О. А. Карабанова // Среднее образование в России. – 2012. – С.248–251.

23. Карабанова, О.А. Что такое универсальные учебные действия и зачем они нужны / О. А. Карабанова // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. – 2010. – № 2. – С. 11-12.

24. Клинова М.Н. Актуальность формирования, развития, оценки познавательных УУД в школе // Сборник научных и методических материалов. Оценка и формирование познавательных универсальных учебных действий в основной школе: опыт образовательных учреждений Пермского края. 2016. С. 9-18.

25. Колмогоров А. Н. О понятии вектора в курсе средней школы // Математика в школе. 1981. № 3. С. 7—8.

26. Кольман Э. История математики в древности . – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 236 с.

27. Коняева Г.Е., Куликова С.И. Познавательное универсальное учебное действие - умение сравнивать // Сборник научных и методических материалов. Оценка и формирование познавательных универсальных

учебных действий в основной школе: опыт образовательных учреждений Пермского края. Пермь: 2016. С. 107-109.

28. Куприянова М. А. Составление математических задач как инструмент развития универсальных учебных действий на уроках математики основной школы // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И.Герцена.-2012. – №150.-С.207-213.

29. Кучменко. К., Сазонова Г., Семенова И.Н. Формирование познавательных универсальных учебных действий в процессе изучения историко-математического материала // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий [Электронный ресурс] : межвузовский сборник научных работ / Урал. гос. пед. ун-т ; науч. ред. Л.В. Сардак. – Электрон. дан. – Екатеринбург : [б. и.], 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). С. 294-299.

30. Кучменко. К., Семенова И.Н. Слова-конструкторы для формулировки заданий, направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий [Электронный ресурс] : межвузовский сборник научных работ / Урал. гос. пед. ун-т ; науч. ред. Л.В. Сардак. – Электрон. дан. – Екатеринбург : [б. и.], 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). С. 300-305.

31. Лаврова Е.Б., Лягаева Т.Ю., Копытова Л.А., Привалова Т.В., Семенова И.Н. Примеры формирования познавательных универсальных учебных действий при обучении математике в 5-6-х классах // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. Екатеринбург: 2018. С. 248-251.

32. Липатникова И.Г. Подготовка будущих учителей математики к формированию у учащихся универсальных учебных действий на основе технологии рефлексивного подхода / И. Г. Липатникова, Е. А. Утюмова // Педагогическое образование в России. 2014. № 8. С. 62–67.

33. Лушников И.Д., Ногтева Е.Ю. // Формирование познавательных универсальных учебных действий в технологиях проектной и учебно-исследовательской деятельности обучающихся: пособие для учителя URL: <http://viro.edu.ru/attachments/article/2495/Universal'nyje%20UD.pdf> (дата обращения 15 января 2020 г.) 15. Малый академический словарь // Gufo URL: <https://gufo.me/dict/mas> (дата обращения: 23.02.2020).

34. Никифоровский, В.А. Из истории алгебры XVI-XVII вв. / В.А. Никифоровский. – М.: Наука, 1979. – 209 с. – Текст : непосредственный

35. Полякова Т.С, Романов, Ю.В. Средства историзации специальной подготовки учителей математики // Актуальные проблемы подготовки учителя математики. Межвузовский сб. научн. тр. – Калуга: Изд-во КГПУ им. К.Э. Циолковского. 2003. С.4-9.

36. Пронина К.С., Семенова И.Н. Использование средств историзма для формирования ПУУД у обучающихся при работе с математическим материалом // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий [Электронный ресурс] : межвузовский сборник научных работ / Урал. гос. пед.ун-т ; науч. ред. Л. В. Сардак. – Электрон.дан. – Екатеринбург : [б. и.], 2020. – 1 электрон.опт. диск (CD-ROM).

37. Рыбников, К.А. История математики. Т.1 / К.А.Рыбников. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 190 с. – Текст : непосредственный.

38. Смирнова В.А., Сухорукова Л.Н. Конструктор учебных задач как средство развития учебно-познавательной деятельности учащихся // Ярославский педагогический вестник . 2017. №2. С. 77-83.

39. Степанова О. В. Развитие познавательных универсальных учебных действий как педагогическая проблема // Молодой ученый. 2016. №2. С. 851-853.

40. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. Утв. приказом МОН РФ от 17 декабря 2010 г. № 1897



41. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. - М.: Педагогика, 1977. - 207 с.
42. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века. - М.- Л.: ГТТИ, 1932. - 230 с.
43. Чуланова Н.А., Черняева Т.Н. Нормативный контекст определения «Познавательные универсальные учебные действия» // Научное обозрение. Педагогические науки. 2015.